CONCOURS D'ENTRÉE

1983

OPTION BIOLOGIE-MATHÉMATIQUES

PREMIÈRE ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

DURÉE : 3 HEURES

N.B. - Ce sujet comporte 3 pages de texte.

On étudie la croissance d'une population de plantes d'une espèce déterminée. Une plante produit au cours de sa vie N graines. Chaque graine se développe indépendamment des autres et a une probabilité p ($p \in]0,1[$) de germer et de donner un descendant. La génération initiale $\mathcal{G}_0$ est supposée composée d'une seule plante. La génération $\mathcal{G}_{n+1}$ est formée des descendants directs de la génération $\mathcal{G}_n$. On suppose que pour tout entier n les nombres de descendants directs des différentes plantes de la génération $\mathcal{G}_n$ constituent des variables aléatoires indépendantes. On note Z_n la variable aléatoire égale au nombre d'individus de la génération $\mathcal{G}_n$.

I

1. - Déterminer la loi de la variable aléatoire Z_1, son espérance et son écart-type.

2. - On note a_n la probabilité pour que l'effectif de la génération $\mathcal{G}_n$ ou celui d'une génération antérieure soit nul (événement A_n).

   a) Calculer a_1 , a_2 .

   b) Montrer que la suite (a_n) vérifie la relation de récurrence :

   $$a_n = (pa_{n-1} + 1 - p)^N$$

   (On cherchera la probabilité conditionnelle de A_n sachant que $\mathcal{G}_1$ a un effectif égal à k).

   c) Montrer que la suite (a_n) est monotone, convergente. Dans quels cas sa limite est-elle égale à un ?

3. - Quelle est la valeur maximum prise par la variable aléatoire Z_n ? Calculer la probabilité pour que Z_n prenne cette valeur.

II

On dira pour abréger qu'une variable aléatoire est "finie", si elle est à valeurs dans $\mathbb{N}$ et qu'elle ne prend qu'un nombre fini de valeurs. Si X est une variable aléatoire finie prenant les valeurs $\{b_1,\ldots,b_q\}$, on lui associe la fonction f_X, appelée fonction génératrice de X, définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f_X(t) = \sum_{k=1}^{q} P(X = b_k)t^{b_k}.$$

1. - Vérifier que l'espérance de X s'exprime au moyen du nombre dérivé $f'_X(1)$.

2. - a) Montrer que, pour tout réel t strictement positif fixé, le nombre $f_X(t)$ est égal à l'espérance de la variable aléatoire t^X (t élevé à la puissance X).

   b) En déduire que la fonction génératrice d'une somme de variables aléatoires finies indépendantes est le produit des fonctions génératrices associées à ces variables.

3. - a) Pour n entier fixé, on note W_k la variable aléatoire égale à l'effectif de la génération $\mathcal{G}_n$, sachant que l'effectif de la génération $\mathcal{G}_1$ est égal à k (c'est-à-dire $P(W_k = \ell) = P(Z_n = \ell \mid Z_1 = k)$).

   Montrer que la variable aléatoire W_k peut s'écrire comme somme de k variables aléatoires indépendantes, chacune suivant la loi de Z_{n-1}.

   b) Exprimer la fonction génératrice f_{W_k} de la variable aléatoire W_k au moyen de la fonction génératrice $f_{Z_{n-1}}$.

   c) En utilisant a) et b), montrer l'égalité : $f_{Z_n} = f_{Z_1} \circ f_{Z_{n-1}}$.

4. - Calculer l'espérance $E(Z_n)$ de la variable aléatoire Z_n. Quelle est la limite de $E(Z_n)$ quand n tend vers $+\infty$?

5. - Les variables aléatoires Z_1 et Z_2 sont-elles indépendantes ? Calculer leur coefficient de corrélation linéaire.

.../...

TRAVAUX RURAUX DE STRASBOURG 1983 185

III

On étudie le modèle suivant pour décrire la répartition géographique des plantes : on considère un plan rapporté à un repère orthonormé d'origine O. La plante de la génération initiale $\mathcal{G}_0$ est localisée à l'origine O. Une plante de la génération $\mathcal{G}_n$ est localisée au point M_n, de coordonnées (X_n, Y_n). On suppose que les variables aléatoires X_n et Y_n sont indépendantes et suivent des lois normales centrées de variance $\frac{n}{2}$. (l'unité de longueur étant choisie).

1. - Soit D_n la variable aléatoire égale à la distance des points O et M_n. Chercher une fonction de densité de D_n et tracer son graphe. Calculer l'espérance et l'écart-type de D_n.

2. - On suppose que la génération $\mathcal{G}_n$ comporte M individus, (M nombre fixé), localisés indépendamment. Calculer le rayon minimum R_1 d'un disque de centre O contenant avec 95 chances sur 100 tous les individus de $\mathcal{G}_n$; ainsi que le rayon maximum R_2 d'un disque centré en O ne contenant avec 95 chances sur 100 aucun individu de $\mathcal{G}_n$.

Application numérique :

$N = 100$; $p = 0{,}015$; $n = 10$; $M = [E(Z_n)]$.
